Định lý Pascal

Nguyễn Văn Linh

Năm 2014

1 Giới thiệu.

Năm 16 tuổi, Pascal công bố một công trình toán học : Về thiết diện của đường cônic, trong đó ông đã chứng minh một định lí nổi tiếng và gọi là Định lí về lục giác thần kì. Ông rút ra 400 hệ quả từ định lí này. Nhà toán học và triết học vĩ đại lúc bấy giờ là Descartes cho rằng công trình của Pascal đã bao hàm được bốn cuốn sách đầu của Apollonius. Ông đánh giá rất cao công trình toán học này và nói : *"Tôi không thể tưởng tượng nổi một người đang ở tuổi thiếu niên mà lại có thể viết được một tác phẩm lớn như thế"*.

Định lý Pascal tổng quát phát biểu cho các đường conic tuy nhiên ở đây chúng ta chỉ xem xét trong trường hợp đường tròn, phát biểu như sau:

Cho sáu điểm bất kì A, B, C, A', B', C' cùng thuộc một đường tròn. Khi đó giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB', BA'), (AC', CA'), (BC', CB')$ thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua 3 giao điểm trên được gọi là đường thẳng Pascal. Có thể thấy vai trò của A, B, C, A', B', C' như nhau nên chúng ta hoàn toàn có thể hoán vị các điểm này. Từ đó thu được rất nhiều đường thẳng Pascal khác nhau. Cụ thể là 60 đường thẳng. Một số tính chất của đường thẳng Pascal xem tại [2].

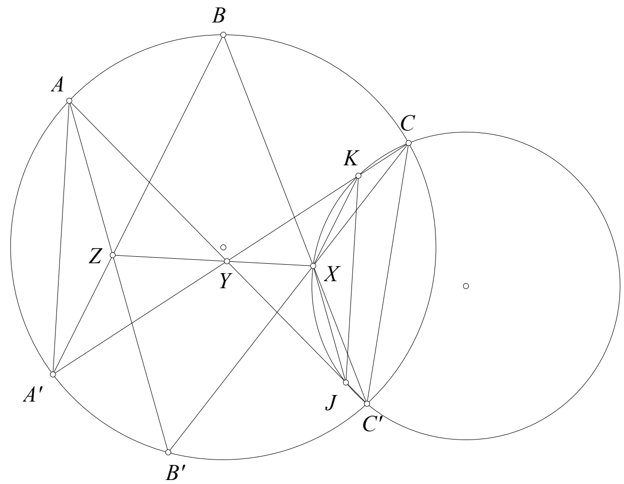
Để dễ quan sát các cặp đường thẳng và không bị ngộ nhận hay nhầm lẫn, đôi khi người ta sử dụng cách kí hiệu 6 điểm như sau: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$.

Trong trường hợp có hai điểm trùng nhau, chẳng hạn $A \equiv B'$, ta có thể coi đường thẳng AB' là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Từ đó thu được định lý Pascal cho lục giác suy biến thành ngũ giác, tứ giác, tam giác nội tiếp.

2 Chứng minh.

Có rất nhiều cách chứng minh định lý Pascal tuy nhiên ở đây xin giới thiệu tới bạn đọc hai cách chứng minh sau.

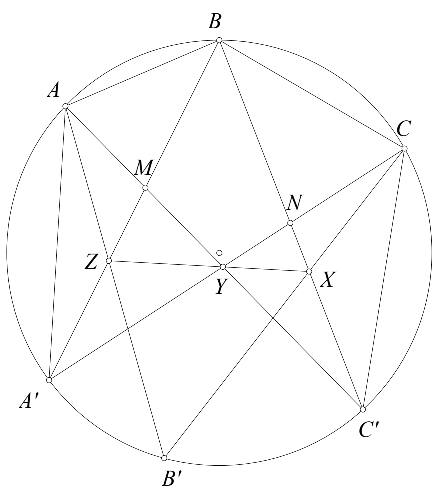
Cách 1 (Jan van Yzeren).



Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BC', CB'), (AC', CA'), (AB', BA')$.
$A'C, AC'$ giao (XCC') lần thứ hai tại K, J.

Ta có $\angle A'KX = \angle XC'C = \angle BA'C$ nên $XK \parallel A'Z$. Chứng minh tương tự ta suy ra hai tam giác XKJ và $ZA'A$ có cạnh tương ứng song song. Từ đó XZ, KA', JA đồng quy hay X, Y, Z thẳng hàng.

Cách 2.

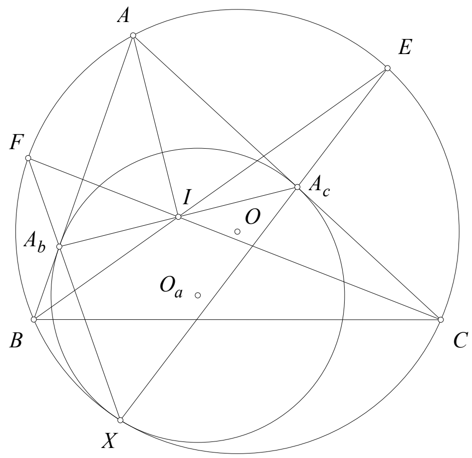


Gọi M, N lần lượt là giao của AC' và BA', BC' và CA'.

Ta có $A(A'C'B'B) = C(A'C'B'B)$ nên $(A'MZB) = (NC'XB)$. Điều đó nghĩa là MC', NA', XZ đồng quy hay X, Y, Z thẳng hàng.

3 Ứng dụng.

Bài 1. *(Bổ đề Sawayama-Thebault).* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn ω tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại A_b, A_c. Chứng minh rằng I là trung điểm của A_bA_c.

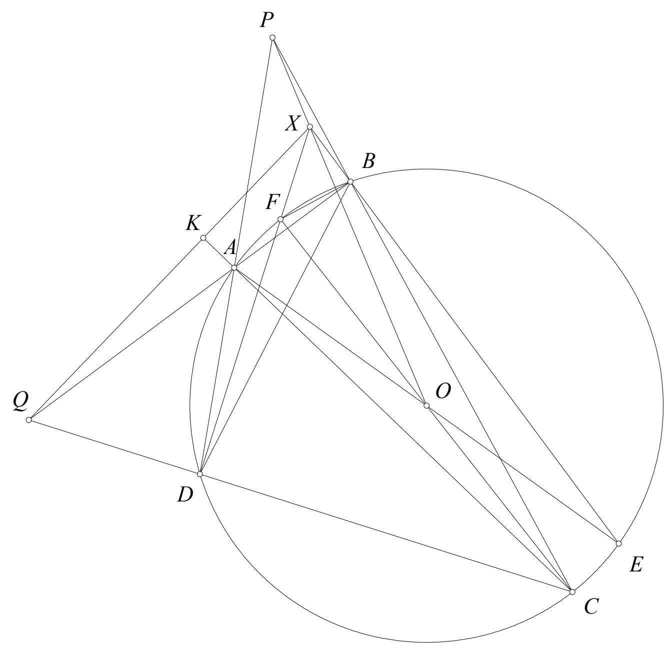


Chứng minh. Gọi X là tiếp điểm của ω và (O), E, F lần lượt là giao điểm của XA_c, XA_b với (O). Dễ thấy E, F lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AB. Suy ra BE giao CF tại I.

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $AFBXCE$ ta có $(AB \cap XF), (AC \cap XE), (BE \cap CF)$ thẳng hàng hay A_b, I, A_c thẳng hàng.

Mặt khác tam giác AA_bA_c cân tại A có AI là phân giác $\angle A_bAA_c$ nên I là trung điểm A_bA_c. $\square$

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AD giao BC tại P, BA giao CD tại Q. Đường thẳng qua Q vuông góc với AC cắt OP tại X. Chứng minh rằng $\angle ABX = 90^o$.



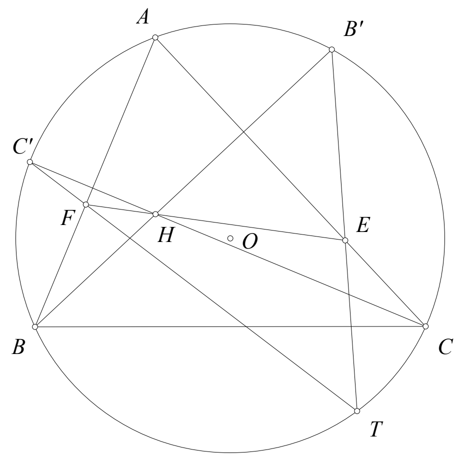
Chứng minh. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng với A, C qua O. DF cắt BE tại X'.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, F, B, E, C, D ta có $AE \cap CF = \{O\}$, $DF \cap BE = \{X'\}$, $AD \cap BC = \{P\}$ thẳng hàng.

Điều còn lại là chứng minh $QX' \perp AC$.

Thật vậy, gọi K là giao của AC và QX'. Do tứ giác $QX'BD$ nội tiếp nên $\angle X'QB + \angle KAQ = \angle FDB + \angle BAC = \angle FCB + \angle BFC = 90°$. Vậy $X' \equiv X$. Ta có đpcm. $\square$

Bài 3. *(Định lý Collings)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Một đường thẳng d bất kì đi qua H. Chứng minh rằng các đường thẳng đối xứng với d qua ba cạnh tam giác ABC đồng quy tại một điểm nằm trên (O). Điểm này gọi là điểm *Anti-Steiner* của d ứng với tam giác ABC.



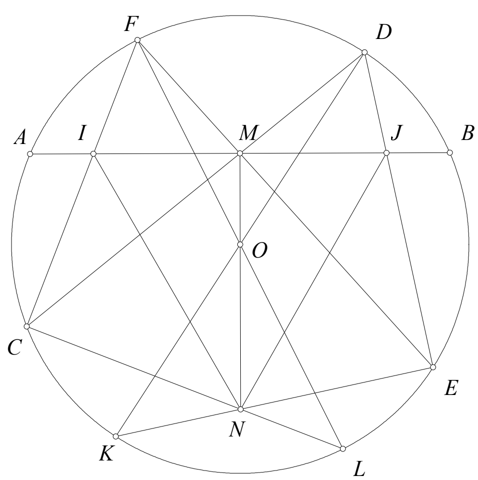
Chứng minh. Gọi d_a, d_b, d_c là các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB. d cắt AC, AB lần lượt tại E, F. BH, CH giao (O) lần thứ hai tại B', C'.

$C'F$ giao (O) tại T. TB' giao AC tại E'.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, C', B, T, C, B' suy ra F, H, E' thẳng hàng. Suy ra $E' \equiv E$.

Do C' và H đối xứng nhau qua AB nên $C'F \equiv d_c$, tương tự $B'E \equiv d_b$. Vậy d_b cắt d_c tại T nằm trên (O). Chứng minh tương tự suy ra d_a, d_b, d_c đồng quy tại T. □

Bài 4. *(Bài toán con bướm trong đường tròn)*. Cho đường tròn (O) và một dây cung AB. M là trung điểm AB. Hai dây cung CD và EF bất kì đi qua M. CF, DE lần lượt AB tại I, J. Chứng minh rằng $MI = MJ$.

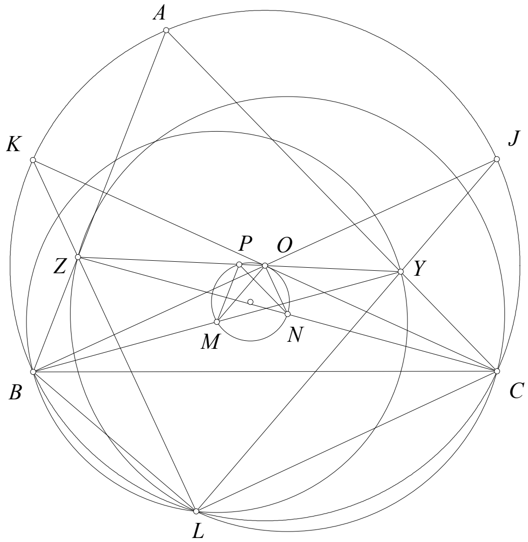


Chứng minh. Gọi L, K lần lượt là điểm đối xứng với F, D qua O. CL giao EK tại N.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm F, D, E, L, K, C suy ra M, O, N thẳng hàng.

Do $\angle IMN = \angle ICN = 90°$, $\angle NMJ = \angle NEJ = 90°$ nên các tứ giác $IMNC, JMNE$ nội tiếp. Suy ra $\angle INM = \angle ICM = \angle JEM = \angle MNJ$. Vậy $MI = MJ$. □

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng d bất kì đi qua O cắt CA, AB tại Y, Z. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BY, CZ, YZ. Chứng minh rằng O, M, N, P cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Gọi J, K lần lượt là điểm đối xứng với B, C qua O. KZ cắt (O) tại L, LJ cắt AC tại Y'.

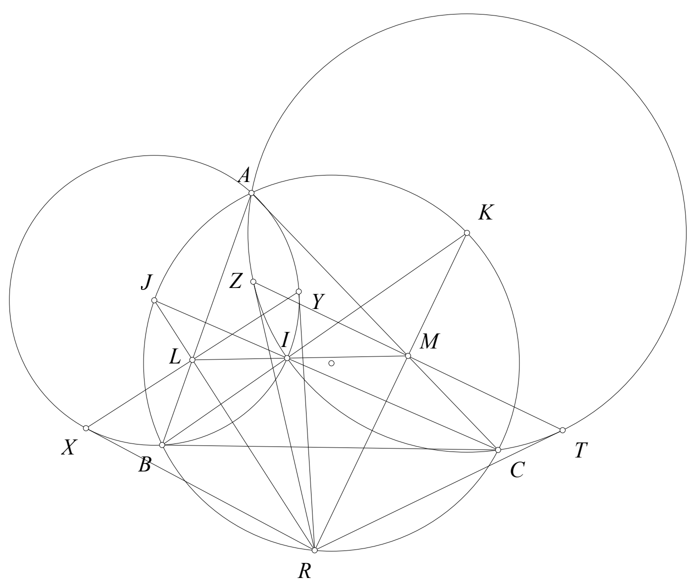
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, K, B, L, C, J suy ra Y', O, Z thẳng hàng hay $Y' \equiv Y$. Ta thu được đường tròn đường kính BY và CZ giao nhau tại L nằm trên (O).

Suy ra $MO \perp BL, NO \perp CL$. Từ đó $\angle MON = 180° - \angle BLC = \angle BAC = \angle MPN$ (do $MP \parallel AB, NP \parallel AC$).

Vậy O, M, N, P cùng thuộc một đường tròn. □

Nhận xét. Nếu gọi X là giao của d với BC thì chúng ta có $(AX), (BY), (CZ)$ đồng trục.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). R là điểm bất kì nằm trên cung BC không chứa A. Kẻ tiếp tuyến RX, RY tới (ABI) và tiếp tuyến RZ, RT tới (ACI). Chứng minh rằng trung điểm XY, ZT và I thẳng hàng.

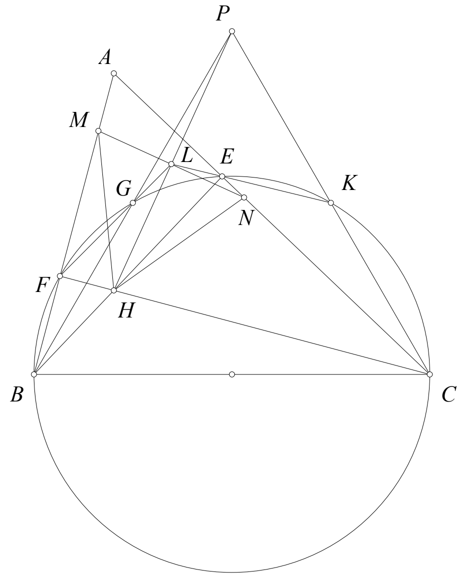


Chứng minh. Gọi J, K lần lượt là điểm chính giữa cung AB, AC. JR cắt AB tại L, KR cắt AC tại M.

Ta có $JX^2 = JB^2 = JL.JR$ nên L chính là trung điểm XY. Tương tự M là trung điểm ZT.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, J, B, R, C, K ta có $JR \cap AB = \{L\}$, $JC \cap KB = \{I\}$, $KR \cap AC = \{M\}$ thẳng hàng. Ta có đpcm. □

Bài 7. Cho tam giác ABC, trực tâm H. M, N là hai điểm nằm trên AB, AC, P nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A sao cho các tam giác HMN, BPC là tam giác đều. Chứng minh rằng $PM = PN$.



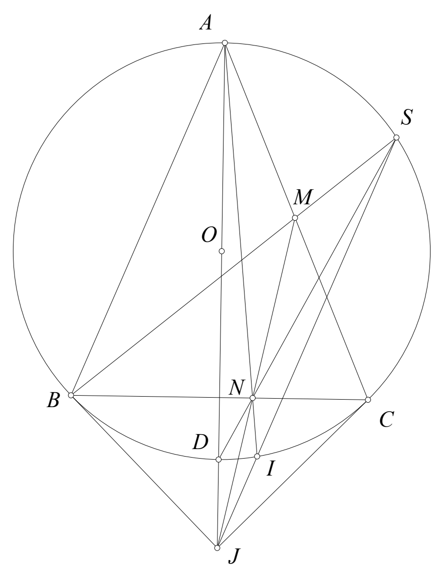
Chứng minh. Gọi L là trung điểm MN. E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên AC, AB. LF giao PB tại G, LE giao CP tại K.

Ta có tứ giác $MLHF$ nội tiếp nên $\angle GFH = \angle LMH = 60^\circ = \angle GBC$. Suy ra B, F, G, C cùng thuộc một đường tròn hay G nằm trên (BC). Tương tự K nằm trên (BC).

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm B, F, G, E, K, C, hay viết lại $\begin{pmatrix} B & F & K \\ C & E & G \end{pmatrix}$, ta có $BE \cap CF = \{H\}$, $BG \cap CK = \{P\}$, $FG \cap EK = \{L\}$ thẳng hàng.

Điều này nghĩa là P nằm trên trung trực của MN hay $PM = PN$. $\square$

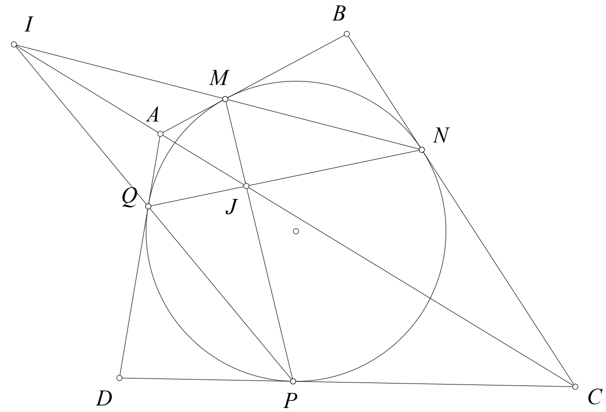
Bài 8. Cho tam giác ABC tại A nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. S chuyển động trên (O). SB giao AC tại M, SD giao BC tại N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.



Chứng minh. Gọi I là giao điểm thứ hai của AN với (O). Do IN, SN lần lượt là phân giác các góc BIC, BSC nên $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{IB}{IC}$ hay $BSCI$ là tứ giác điều hoà. Điều này nghĩa là SI đi qua giao điểm J của tiếp tuyến tại B và C.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, B, I, C, C, S ,hay viết lại $\begin{pmatrix} S & C & A \\ C & I & B \end{pmatrix}$, ta có $BS \cap AC = \{M\}, AI \cap CB = \{N\}, SI \cap CC = \{J\}$ thẳng hàng. Vậy MN luôn đi qua J cố định. □

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy.

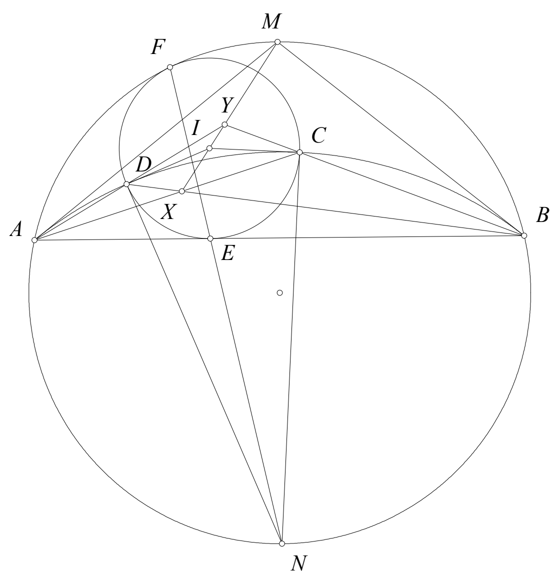


Chứng minh. Gọi I là giao của MN và PQ, J là giao của MP và NQ.

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm Q, Q, M, M, N, P, hay viết lại $\begin{pmatrix} M & Q & N \\ Q & M & P \end{pmatrix}$, suy ra $MP \cap NQ = \{J\}$, $MM \cap QQ = \{A\}$, $PQ \cap MN = \{I\}$ thẳng hàng hay $A \in IJ$.

Chứng minh tương tự $C \in IJ$ hay AC, MP, NQ đồng quy tại J. Tương tự suy ra AC, BD, MP, NQ đồng quy. □

Bài 10. (Sharygin Geometry Olympiad 2012). Cho đường tròn (O), dây cung AB. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với AB. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung AB chứa (I) và không chứa (I). Kẻ tiếp tuyến NC, ND tới (I). AC giao BD tại X, AD giao BC tại Y. Chứng minh rằng X, Y, I, M thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với $AB, (O)$. Suy ra E, F, N thẳng hàng.

Ta có $ND^2 = NC^2 = NE.NF = NA^2 = NB^2$ nên A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn (N, NA).

Chú ý rằng tiếp tuyến tại C, D của (N) giao nhau tại I, tiếp tuyến tại A, B của (N) giao nhau tại M. Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, B, C, C, D, D ta có $CC \cap DD = \{I\}, BD \cap AC = \{X\}, AD \cap BC = \{Y\}$ thẳng hàng.

Lại áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm A, A, B, B, C, D ta có $AA \cap BB = \{M\}, BD \cap AC = \{X\}, AD \cap BC = \{Y\}$ thẳng hàng.

Vậy X, Y, I, M thẳng hàng. □

4 Bài tập áp dụng.

Bài 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là giao của AM, BM, CM với (O), cạnh của tam giác $A'B'C'$ cắt cạnh tam giác ABC theo thứ tự tại X, Y, Z, T, U, V. Chứng minh rằng XT, YU, ZV đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn $(AOM), (BON), (COP)$ đồng trục.

Bài 13. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi E là điểm nằm ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến EC, ED. AD giao BC tại F sao cho F nằm trong (O). Chứng minh rằng $EF \perp AB$.

Bài 14. *(APMO 2013).* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). P nằm trên tia AC sao cho PB, PD tiếp xúc với (O). Tiếp tuyến của (O) tại C cắt PD tại Q, AD tại R. E là giao điểm thứ hai của AQ và (O). Chứng minh rằng B, E, R thẳng hàng.

Bài 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kì trên mặt phẳng. AP, BP, CP cắt (O) lần thứ hai tại A_1, B_1, C_1. Đường tròn đường kính AP, BP, CP giao (O) lần thứ hai tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, OP$ đồng quy.

Bài 16. Cho tam giác ABC, đường cao BD, CE giao nhau tại trực tâm H. Gọi S, R là trung điểm BH, CH. SC giao BR tại Q, ES giao DR tại G. Chứng minh rằng A, Q, G thẳng hàng.

Bài 17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. M là trung điểm BC. Tia MH cắt (O) tại E. Đường thẳng qua qua A song song với BC cắt (O) tại D. DE giao OH tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc với (O).

Bài 18. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. P là điểm nằm trong tứ giác sao cho $\angle PAB + \angle PCB = \angle PBC + \angle PDC = 90^o$. Chứng minh rằng O, P, E thẳng hàng.

Bài 19. *(THTT).* Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp đường tròn (O) vừa ngoại tiếp đường tròn (I). AC giao BD tại P. Chứng minh rằng O, I, P thẳng hàng.

Bài 20. *(Romania TST 3 2010).* Cho tam giác không cân ABC. Phân giác BB_0, CC_0 cắt (O) lần thứ hai tại B_1, C_1. Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. B_0C_0 giao B_1C_1 tại P. Chứng minh rằng $IP \parallel BC$.

Bài 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AO giao (O) lần thứ hai tại A_1. Tiếp tuyến của (O) tại A_1 giao BC tại D. DO giao AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $OP = OQ$.

Bài 22. *(IMO Shortlist 2007).* Cho tam giác ABC nội tiếp (O), A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. P là điểm chuyển động trên (O). PA_1, PB_1, PC_1 cắt (O) lần thứ hai tại A', B', C'. Chứng minh rằng diện tích tam giác tạo bởi giao điểm các đường thẳng AA', BB', CC' không phụ thuộc vào vị trí của P.

Bài 23. *(Bulgaria TST 2003).* Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Hạ $OP \perp AC$. Chứng minh rằng $\angle APB = \angle APD$.

Bài 24. *(China 2005).* Một đường tròn cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự tại D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2. Gọi L, M, N lần lượt là giao điểm của D_1E_1 và D_2F_2, E_1F_1 và E_2D_2, F_1D_1 và F_2E_2. Chứng minh rằng AL, BM, CN đồng quy.

Tài liệu

[1] *Pascal's theorem*, Cut-the-knot.
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Chasles.shtml

[2] *Pascal lines*, from Wolfram Mathworld
http://mathworld.wolfram.com/PascalLines.html

[3] Hoàng Quốc Khánh, *Câu chuyện nhỏ về một định lý lớn*, Tạp chí Toán học Mathvn, Số 2 năm 2009.

[4] AoPS Forum.
http://www.artofproblemsolving.com/Forum

Email: *Lovemathforever@gmail.com*